

Bài tập Đối ngẫu có lời giải

Bài 1 Cho bài toán gốc:

$$f(X) = \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 & \rightarrow \min \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 2 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 \geq 5 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \geq 1 \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,4}) \end{cases}$$

- 1) Viết bài toán đối ngẫu.
- 2) Hãy cho biết nếu giải bằng đơn hình thì bài toán nào ít biến hơn.
- 3) Hãy tổng quát hóa nhận xét trên.

1) Bài toán đối ngẫu.

$$g(Y) = \begin{cases} 2y_1 + 5y_2 + y_3 \rightarrow \max \\ 2y_1 + y_2 - y_3 \leq 1 \\ y_1 - 2y_2 - y_3 \leq 3 \\ y_1 - y_2 + y_3 \leq 2 \\ y_1 + 3y_2 + y_3 \leq 0 \\ y_i \geq 0 \quad (i = \overline{1,3}) \end{cases}$$

2) Bài toán gốc: có 4 biến, thêm 3 biến phụ để chuyển về dạng chính tắc, thêm 3 biến giả để chuyển về dạng chuẩn. Vậy phải dùng 10 biến.

Bài toán đối ngẫu: có 3 biến, thêm 4 biến bù để chuyển về dạng chính tắc. Bài toán chính tắc cũng là bài toán chuẩn. Vậy phải dùng 7 biến.

Suy ra, nếu giải bằng đơn hình thì bài toán đối ngẫu dùng ít biến hơn.

3) Tổng quát hóa nhận xét trên: Xét cặp bài toán đối ngẫu có dạng:

$$\begin{aligned} f(X) = CX \rightarrow \min \quad & g(Y) = BY \rightarrow \max \\ \begin{cases} AX \geq B \\ X \geq 0 \end{cases} & \quad \begin{cases} A^T Y \leq C \\ Y \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Trong đó A là ma trận cấp $m \times n$ và $C \geq 0$.

Bài toán gốc (min): có n biến, thêm m biến phụ để chuyển về dạng chính tắc, thêm m biến giả để chuyển về dạng chuẩn. Vậy phải dùng $(n + 2m)$ biến.

Bài toán đối ngẫu (max): có m biến, thêm n biến bù để chuyển về dạng chính tắc. Bài toán chính tắc cũng là bài toán chuẩn. Vậy phải dùng $(m + n)$ biến.

Suy ra, nếu giải bằng đơn hình thì bài toán đối ngẫu dùng ít biến hơn.

Bài 2 Xét bài toán QHTT sau:

$$f(X) = \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \rightarrow \min \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 1 \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,4}) \end{cases}$$

- 1) Hãy chứng tỏ rằng nếu X^* là phương án tối ưu thì thành phần thứ 2 và thành phần thứ 4 phải bằng 0.
- 2) Hãy cho nhận xét.

1) Bài toán đối ngẫu của bài toán trên là:

$$g(Y) = 2y_1 + 5y_2 + y_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 2y_3 \leq 1 \\ y_1 + y_2 + 2y_3 \leq 3 \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 \leq 2 \\ 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 \leq 1 \\ y_i \geq 0 \quad (i = 1, 3) \end{cases}$$

Nếu bài toán gốc có phương án tối ưu thì bài toán đối ngẫu cũng có phương án tối ưu. Gọi x_j và y_i là các thành phần của hai phương án tối ưu.

Xét cặp điều kiện đối ngẫu:

$$x_4 \geq 0 \quad \text{và} \quad 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 \leq 1$$

Do $0y_1 + 0y_2 + 0y_3 = 0 \neq 1$ nên theo định lý độ lệch bù yếu, ta phải có $x_4 = 0$.

Xét cặp điều kiện đối ngẫu:

$$x_2 \geq 0 \quad \text{và} \quad y_1 + y_2 + 2y_3 \leq 3$$

Xét ràng buộc I và II của bài toán đối ngẫu, ta có:

$$y_1 + y_2 + 2y_3 \leq 2y_1 + y_2 + 2y_3 \leq 1 \Rightarrow y_1 + y_2 + 2y_3 \neq 3$$

Do $y_1 + y_2 + 2y_3 \neq 3$ nên theo định lý độ lệch bù yếu, ta phải có $x_2 = 0$.

2) Xét bài toán min với các biến không âm.

a) Nếu:

- Hàm mục tiêu có xuất hiện biến x_j .
- Các ràng buộc không chứa x_j .

Lúc này thì phương án tối ưu, nếu có, phải thỏa điều kiện $x_j = 0$.

b) Nếu:

- Hệ số c_p và c_q trong hàm mục tiêu thỏa điều kiện $c_p < c_q$.
- Hai vectơ cột A_p và A_q thỏa điều kiện $A_p \geq A_q$.

Lúc này thì phương án tối ưu, nếu có, phải thỏa điều kiện $x_q = 0$.

Khi bài toán có các trường hợp đặc biệt này thì ta có thể bỏ bớt biến của bài toán trước khi giải.

Bài 3 Xét bài toán sau:

Một cửa hàng bán lẻ hiện có 10,2 Kg bánh và 3 Kg kẹo dùng để gói thành các gói quà để bán. Chi tiết của các gói quà cho bởi bảng sau:

Nguyên liệu	Gói quà		
	A	B	C
Bánh (10g)	6	7	8
Kẹo (10g)	4	3	1
Giá bán (trăm đồng)	34	38	36

- 1) Cửa hàng này phải đóng bao nhiêu gói mỗi loại để bán được nhiều tiền nhất?
- 2) Nếu một người đến hỏi mua hết số bánh kẹo nêu trên thì phải trả giá bao nhiêu mỗi ký bánh, kẹo để cửa hàng đồng ý bán và số tiền bỏ ra là ít nhất?

1) Ta mô hình bài toán của cửa hàng thành bài toán QHTT sau:

Gọi x_1, x_2, x_3 là số gói quà loại A, B, C được đóng gói. Theo ý nghĩa thực tế ta có $x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 3})$ (bỏ qua điều kiện nguyên của biến số).

Lấy đơn vị tiền là trăm đồng thì doanh thu của cửa hàng là:

$$f(X) = 34x_1 + 38x_2 + 36x_3$$

Theo yêu cầu bài toán là doanh thu cao nhất, ta ghi $f(X) \rightarrow \max$.

Do số bánh bị hạn chế nên:

$$6x_1 + 7x_2 + 8x_3 \leq 1.020$$

Do số kẹo bị hạn chế nên:

$$4x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 300$$

Vậy ta có bài toán QHTT:

$$f(X) = 34x_1 + 38x_2 + 36x_3 \rightarrow \max$$
$$\begin{cases} 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 \leq 1.020 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 300 \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3) \end{cases}$$

Thêm ẩn bù, giải bài toán trên bằng đơn hình thì ta có được lời giải như sau:

$$X_{\max} = (0, 36, 96, 0, 0) \text{ với } f_{\max} = 4.824$$

Vậy, khi cửa hàng dùng số bánh kẹo trên để đóng 36 gói loại B và 96 gói loại C thì doanh thu sẽ cao nhất và bằng 482.400 đồng.

2) Gọi y_1, y_2 là giá (tính theo đơn vị trăm đồng) mỗi 10g bánh, kẹo thì:

- $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$.
- Tổng số tiền người mua bỏ ra là $g(Y) = 1.020y_1 + 300y_2$. Theo yêu cầu số tiền bỏ ra mua là thấp nhất, ta ghi $g(Y) \rightarrow \min$.
- Để cửa hàng đồng ý bán hết bánh kẹo thì số tiền thu được ứng với số bánh, kẹo có trong mỗi gói quà không được thấp hơn giá bán gói quà. Vậy:

$$6y_1 + 4y_2 \geq 34$$

$$7y_1 + 3y_2 \geq 38$$

$$8y_1 + y_2 \geq 36$$

Tóm lại, bài toán QHTT của người đi mua là:

$$g(Y) = 1.020y_1 + 300y_2 \rightarrow \min$$
$$\begin{cases} 6y_1 + 4y_2 \geq 34 \\ 7y_1 + 3y_2 \geq 38 \\ 8y_1 + y_2 \geq 36 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Đây chính là bài toán đối ngẫu của bài toán đã giải. Vậy, theo định lý độ lệch bù yếu, ta có:

$$x_2 = 36 \neq 0 \Rightarrow 7y_1 + 3y_2 = 38 \quad (1)$$

$$x_3 = 96 \neq 0 \Rightarrow 8y_1 + y_2 = 36 \quad (2)$$

Giải hệ phương trình (1),(2) ta có $Y^* = (8/25, 13/25)$. Đây chính là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

Lưu ý đến đơn vị tính và $8/25 = 0,32; 13/25 = 0,52$ thì ta có lời giải thực tế như sau:

Nếu người mua trả giá 3.200 đ/Kg bánh và 5.200 đ/Kg kẹo thì cửa hàng sẽ đồng ý bán. Số tiền bỏ ra mua 10,2 Kg bánh và 3Kg kẹo là thấp nhất và bằng 482.400 đồng.

Bài 4 Hãy chứng tỏ rằng có thể tìm phương án tối ưu của bài toán QHTT tùy ý bằng cách giải một hệ gồm các phương trình tuyến tính và các bất phương trình tuyến tính.

Vì mọi bài toán QHTT đều đưa được về dạng chính tắc nên ta xét bài toán chính tắc. Bài toán chính tắc và bài đối ngẫu của nó là cặp bài toán đối ngẫu không đối xứng.

Xét hệ gồm các phương trình tuyến tính và các bất phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} AX = B \\ X \geq 0 \\ A^T Y \leq C \\ CX = BY \end{cases}$$

Nghiệm X, Y của hệ này chính là phương án của bài toán min và bài toán max thỏa điều kiện $f(X) = g(Y)$. Vậy X, Y là phương án tối ưu của bài toán min và bài toán max.

Bài tập Đối ngẫu

LẬP BÀI TOÁN ĐỐI NGẪU VÀ TÌM LỜI GIẢI

Bài 1 Cho bài toán QHTT:

$$f(X) = \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \rightarrow \max \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \leq 2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 \leq 5 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 1 \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 4}) \end{cases}$$

Cho biết một phương án tối ưu của bài toán trên là $X^* = (0, 3, 7/3, 10/3)$. Hãy viết bài toán đối ngẫu và cho biết lời giải của bài đối ngẫu.

Bài 2 Cho bài toán QHTT:

$$f(X) = \begin{cases} x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 \rightarrow \min \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 5}) \end{cases}$$

- 1) Giải bài toán trên. Phương án tối ưu, nếu có, có duy nhất không?
- 2) Hãy viết bài toán đối ngẫu và cho biết lời giải của bài đối ngẫu. Phương án tối ưu của bài đối ngẫu, nếu có, có duy nhất không?

Bài 3 Cho bài toán QHTT:

$$f(X) = \begin{cases} -x_2 - x_3 + 2x_4 \rightarrow \max \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ -3x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 4 \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 4}) \end{cases}$$

- 1) Giải bài toán trên.
- 2) Hãy viết bài toán đối ngẫu và cho biết lời giải của bài đối ngẫu.

Bài 4 Cho bài toán QHTT:

$$f(X) = \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 \rightarrow \max \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 1 \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 4}) \end{cases}$$

- 1) Hãy chứng tỏ nếu X^* là phương án tối ưu thì thành phần thứ 1 và thành phần thứ 4 phải bằng 0.
- 2) Hãy cho nhận xét.

MÔ HÌNH THỰC TẾ VÀ BÀI TOÁN ĐỐI NGẪU

Bài 5 Một nhà hàng hiện có 10,2 Kg hương liệu A và 3 Kg hương liệu B. Khi pha thêm hai hương liệu này vào thực phẩm thì sẽ làm tăng hương vị, do đó làm tăng giá bán. Các cách phối hợp hai hương liệu này và hiệu quả kinh tế thu được cho bởi bảng sau:

Hương liệu	Cách pha		
	I	II	II
A (10 g)	6	7	8
B (10 g)	4	3	2
Giá bán tăng thêm (ngàn đồng)	34	38	36

Ngoài cách pha chế, nhà hàng cũng có thể bán hương liệu A và B với giá 2.000đ và 3.000đ mỗi gói 10g.

- 1) Cửa hàng sẽ chọn giải pháp như thế nào để hiệu quả thu được là cao nhất?
- 2) Một người muốn mua hương liệu để tự pha chế thì phải trả giá mỗi loại gói 10g là bao nhiêu thì nhà hàng mới có thể bán?
- 3) Giá hương liệu trên thị trường là bao nhiêu thì cửa hàng không thể dùng cách pha chế hương liệu để làm tăng hiệu quả kinh tế?